Possible version two:

As is indicated in the graph, the box-office income of Chinese films increased constantly from 2012 to 2015, but its growth, for one reason or another, slowed down in 2016.

The increase in the box-office income can be attributed to a number of factors. The quality of life has improved and watching films is regarded as a good means of entertainment. Besides, filming technology has advanced and more quality films are on offer. Moreover, the internet plays an important part. On the internet, people can seek information about their favorite stars and buy tickets at a discount as well, which is both time-saving and economical.

However, the film market may witness a slowdown in the near future. Cinemas have gradually given way to the rise of the internet and cellphones, and the ticket price is on the increase. Therefore, the film industry should make greater efforts to attract more viewers.

(150 words)

数 学 Ⅰ 试 题

参考公式:

柱体的体积 $V = Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

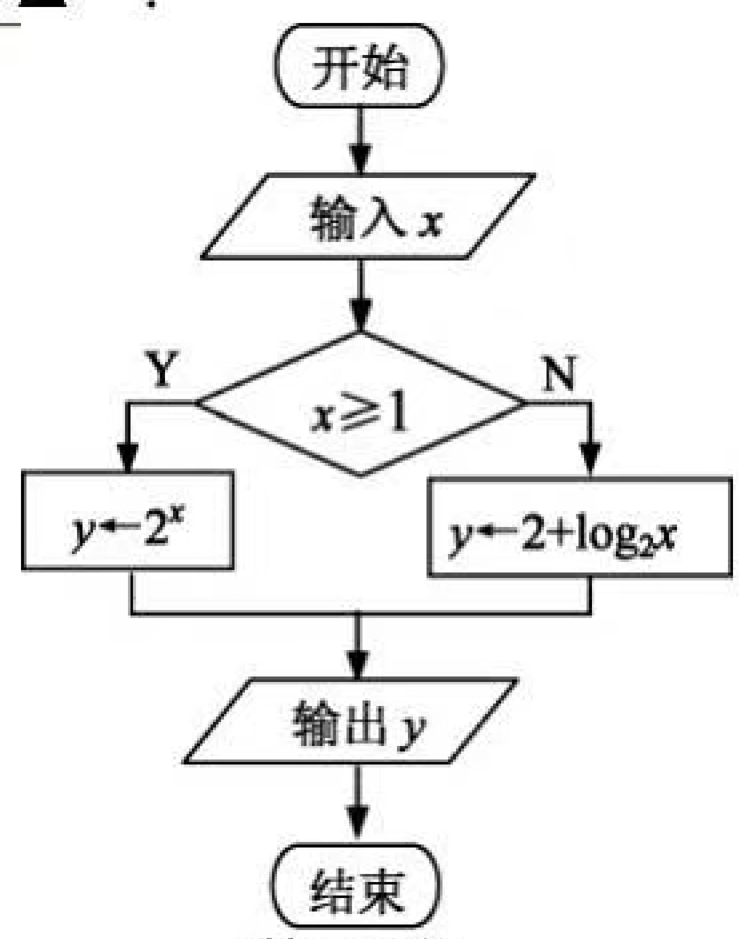
球的体积 $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$，其中 R 是球的半径.

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{a, a^2+3\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$，则实数 a 的值为__▲__.

2. 已知复数 $z = (1 + \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$，其中 i 是虚数单位，则 z 的模是__▲__.

3. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品，产量分别为 200，400，300，100 件. 为检验产品的质量，现用分层抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验，则应从丙种型号的产品中抽取__▲__件.

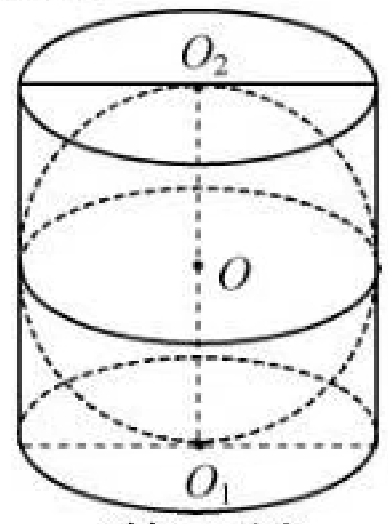


(第 4 题)

4. 右图是一个算法流程图. 若输入 x 的值为 $\dfrac{1}{16}$，则输出 y 的值是__▲__.

5. 若 $\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{6}$，则 $\tan\alpha =$ __▲__.

6. 如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切. 记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是__▲__.



(第 6 题)

7. 记函数 $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$ 的定义域为 D. 在区间 $[-4, 5]$ 上随机取一个数 x，则 $x \in D$ 的概率是__▲__.

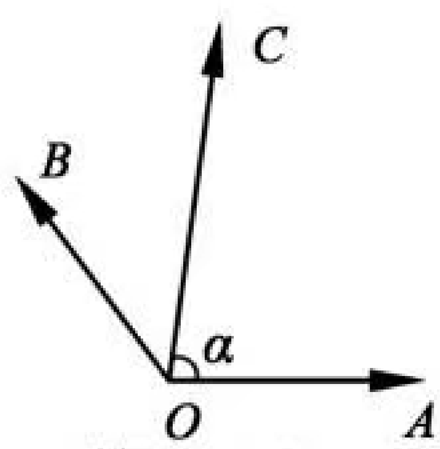
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右准线与它的两条渐近线分别交于点 P，Q，其焦点是 F_1，F_2，则四边形 F_1PF_2Q 的面积是__▲__.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n. 已知 $S_3 = \dfrac{7}{4}$，$S_6 = \dfrac{63}{4}$，则 $a_8 =$ __▲__.

10. 某公司一年购买某种货物 600 吨，每次购买 x 吨，运费为 6 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 x 的值是__▲__.

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 2x + \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$，则实数 a 的取值范围是__▲__.

12. 如图，在同一个平面内，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1，1，$\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α，且 $\tan\alpha = 7$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°. 若 $\overrightarrow{OC} = m\,\overrightarrow{OA} + n\,\overrightarrow{OB}$ $(m, n \in \mathbf{R})$，则 $m + n =$ __▲__.



(第 12 题)

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-12,0)$，$B(0,6)$，点 P 在圆 O：$x^2+y^2=50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$，则点 P 的横坐标的取值范围是__▲__.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 1 的函数，在区间 $[0,1)$ 上，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in D,\\ x, & x\notin D,\end{cases}$ 其中集合 $D=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n-1}{n},\ n\in\mathbf{N}^*\right\}$，则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是__▲__.

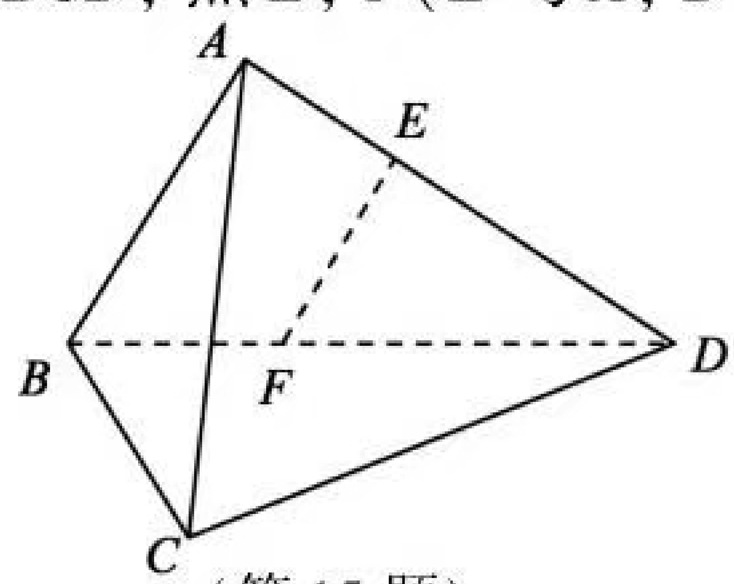
二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC\perp BD$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，点 E，F（E 与 A，D 不重合）分别在棱 AD，BD 上，且 $EF\perp AD$.

求证：(1) $EF\parallel$ 平面 ABC；

(2) $AD\perp AC$.



（第 15 题）

16.（本小题满分 14 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 x 的值；

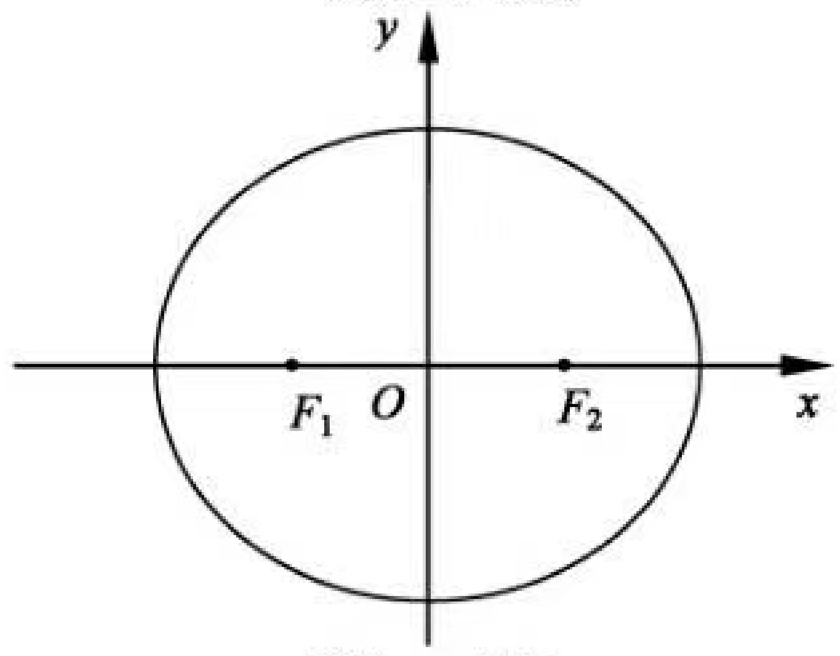
(2) 记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

17.（本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，两准线之间的距离为 8. 点 P 在椭圆 E 上，且位于第一象限，过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1，过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 若直线 l_1，l_2 的交点 Q 在椭圆 E 上，求点 P 的坐标.



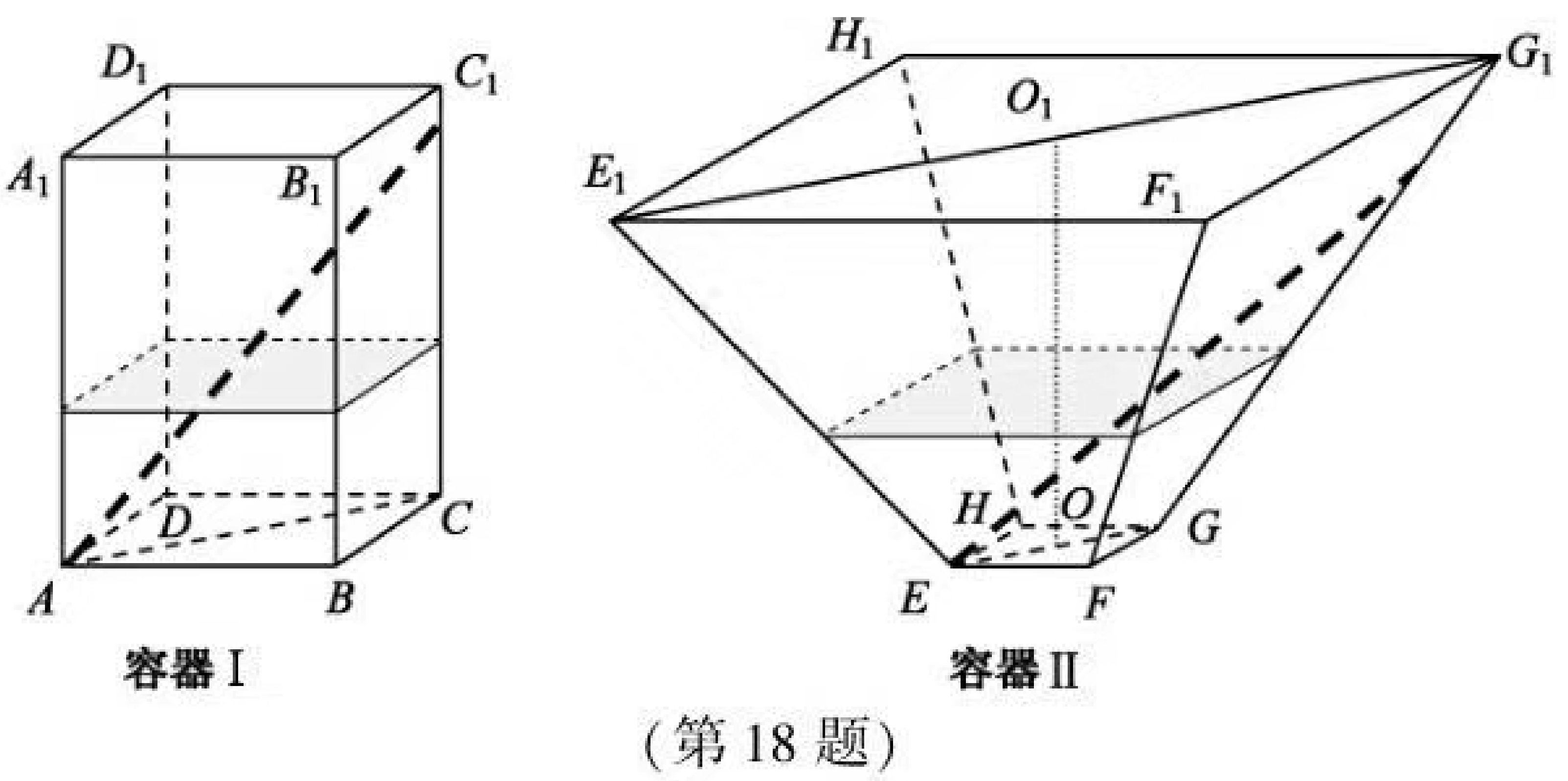
（第 17 题）

18.（本小题满分 16 分）

如图，水平放置的正四棱柱形玻璃容器 Ⅰ 和正四棱台形玻璃容器 Ⅱ 的高均为 32 cm，容器 Ⅰ 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm，容器 Ⅱ 的两底面对角线 EG，E_1G_1 的长分别为 14 cm 和 62 cm. 分别在容器 Ⅰ 和容器 Ⅱ 中注入水，水深均为 12 cm. 现有一根玻璃棒 l，其长度为 40cm.（容器厚度、玻璃棒粗细均忽略不计）

(1) 将 l 放在容器 Ⅰ 中，l 的一端置于点 A 处，另一端置于侧棱 CC_1 上，求 l 没入水中部分的长度；

(2) 将 l 放在容器 Ⅱ 中，l 的一端置于点 E 处，另一端置于侧棱 GG_1 上，求 l 没入水中部分的长度.



（第 18 题）

19.（本小题满分 16 分）

对于给定的正整数 k，若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$ 对任意正整数 $n(n>k)$ 总成立，则称数列 $\{a_n\}$ 是“$P(k)$ 数列”.

(1) 证明：等差数列 $\{a_n\}$ 是“$P(3)$ 数列”；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是“$P(2)$ 数列”，又是“$P(3)$ 数列”，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列.

20.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$（$a>0$，$b\in\mathbf{R}$）有极值，且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.（极值点是指函数取极值时对应的自变量的值）

（1）求 b 关于 a 的函数关系式，并写出定义域；

（2）证明：$b^2>3a$；

（3）若 $f(x)$，$f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\dfrac{7}{2}$，求 a 的取值范围.

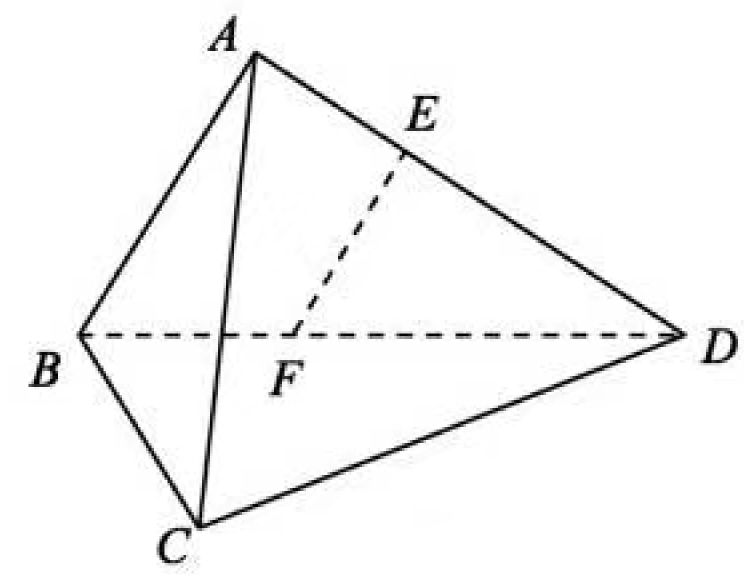
数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法. 每小题 5 分，共计 70 分.

1. 1	2. $\sqrt{10}$	3. 18	4. -2	5. $\dfrac{7}{5}$
6. $\dfrac{3}{2}$	7. $\dfrac{5}{9}$	8. $2\sqrt{3}$	9. 32	10. 30
11. $[-1,\dfrac{1}{2}]$	12. 3	13. $[-5\sqrt{2},1]$	14. 8	

二、解答题

15. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力. 满分 14 分.



（第 15 题）

证明：（1）在平面 ABD 内，因为 $AB\perp AD$，$EF\perp AD$，

所以 $EF/\!/AB$.

又因为 $EF\not\subset$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $EF/\!/$ 平面 ABC.

（2）因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，

平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$BC\subset$ 平面 BCD，$BC\perp BD$，

所以 $BC\perp$ 平面 ABD.

因为 $AD\subset$ 平面 ABD，所以 $BC\perp AD$.

又 $AB\perp AD$，$BC\cap AB=B$，$AB\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AD\perp$ 平面 ABC.

又因为 $AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AD\perp AC$.

16. 本小题主要考查向量共线、数量积的概念及运算，考查同角三角函数关系、诱导公式、两角和（差）的三角函数、三角函数的图像与性质，考查运算求解能力. 满分 14 分.

解：（1）因为 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\ \sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ -\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，

所以 $-\sqrt{3}\cos x=3\sin x$.

若 $\cos x=0$，则 $\sin x=0$，与 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 矛盾，故 $\cos x\neq 0$.

于是 $\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $x\in[0,\ \pi]$，所以 $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

（2）$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos x,\ \sin x)\cdot(3,\ -\sqrt{3})=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos(x+\dfrac{\pi}{6})$.

因为 $x\in[0,\ \pi]$，所以 $x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}]$，

从而 $-1\leqslant\cos(x+\dfrac{\pi}{6})\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

于是，当 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取到最大值 3；

当 $x+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，即 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取到最小值 $-2\sqrt{3}$.

17. **本小题主要考查直线方程、直线与直线的位置关系、椭圆方程、椭圆的几何性质等基础知识，考查分析问题能力和运算求解能力. 满分 14 分.**

解：(1) 设椭圆的半焦距为 c.

因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$，两准线之间的距离为 8，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{2a^2}{c}=8$，

解得 $a=2$，$c=1$，于是 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

因此椭圆 E 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由(1)知，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

设 $P(x_0,y_0)$，因为 P 为第一象限的点，故 $x_0>0$，$y_0>0$.

当 $x_0=1$ 时，l_2 与 l_1 相交于 F_1，与题设不符.

当 $x_0\neq 1$ 时，直线 PF_1 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0+1}$，直线 PF_2 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0-1}$.

因为 $l_1\perp PF_1$，$l_2\perp PF_2$，所以直线 l_1 的斜率为 $-\frac{x_0+1}{y_0}$，直线 l_2 的斜率为 $-\frac{x_0-1}{y_0}$，

从而直线 l_1 的方程：$y=-\frac{x_0+1}{y_0}(x+1)$，　①

直线 l_2 的方程：$y=-\frac{x_0-1}{y_0}(x-1)$.　②

由①②，解得 $x=-x_0$，$y=\frac{x_0^2-1}{y_0}$，所以 $Q(-x_0,\frac{x_0^2-1}{y_0})$.

因为点 Q 在椭圆上，由对称性，得 $\frac{x_0^2-1}{y_0}=\pm y_0$，即 $x_0^2-y_0^2=1$ 或 $x_0^2+y_0^2=1$.

又 P 在椭圆 E 上，故 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$.

由 $\begin{cases}x_0^2-y_0^2=1,\\ \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1,\end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，$y_0=\frac{3\sqrt{7}}{7}$；$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=1,\\ \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1,\end{cases}$ 无解.

因此点 P 的坐标为 $(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7})$.

18. **本小题主要考查正棱柱、正棱台的概念，考查正弦定理、余弦定理等基础知识，考查空间想象能力和运用数学模型及数学知识分析和解决实际问题的能力. 满分 16 分.**

解：(1) 由正棱柱的定义，$CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 $ABCD$，$CC_1\perp AC$.

记玻璃棒的另一端落在 CC_1 上点 M 处.

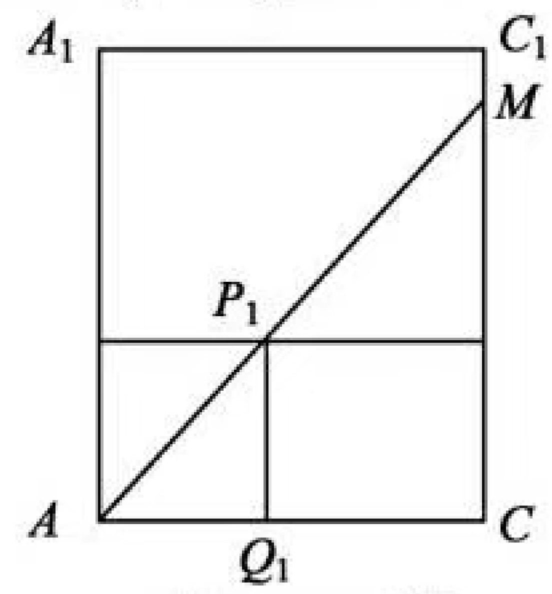
因为 $AC=10\sqrt{7}$，$AM=40$，

所以 $MC=\sqrt{40^2-(10\sqrt{7})^2}=30$，从而 $\sin\angle MAC=\frac{3}{4}$.

记 AM 与水面的交点为 P_1，过 P_1 作 $P_1Q_1\perp AC$，Q_1 为垂足，

则 $P_1Q_1\perp$ 平面 $ABCD$，故 $P_1Q_1=12$，

从而 $AP_1=\frac{P_1Q_1}{\sin\angle MAC}=16$.



(第 18(1) 题)

答：玻璃棒 l 没入水中部分的长度为 16 cm.

(如果将“没入水中部分”理解为“水面以上部分”，则结果为 24 cm)

(2) 如图，O，O_1 是正棱台的两底面中心.

由正棱台的定义，$OO_1\perp$ 平面 $EFGH$，所以平面 $E_1EGG_1\perp$ 平面 $EFGH$，$O_1O\perp EG$.

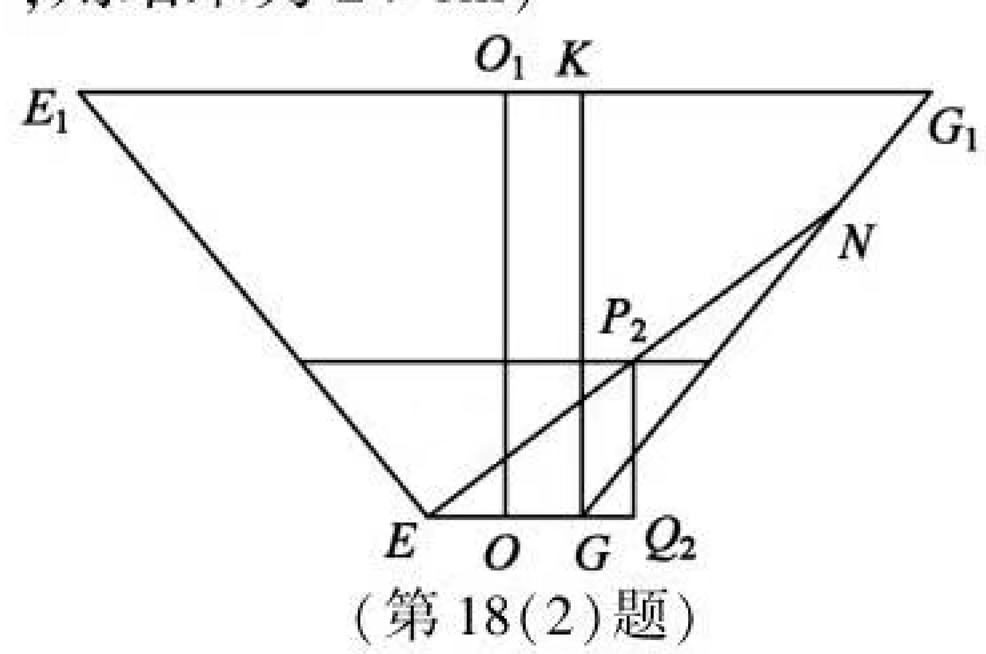
同理，平面 $E_1EGG_1\perp$ 平面 $E_1F_1G_1H_1$，$O_1O\perp E_1G_1$.

记玻璃棒的另一端落在 GG_1 上点 N 处.

过 G 作 $GK\perp E_1G_1$，K 为垂足，

则 $GK=OO_1=32$.

因为 $EG=14$，$E_1G_1=62$，



(第 18(2) 题)

所以 $KG_1=\dfrac{62-14}{2}=24$，从而 $GG_1=\sqrt{KG_1^{\,2}+GK^2}=\sqrt{24^2+32^2}=40$.

设 $\angle EGG_1=\alpha$，$\angle ENG=\beta$，则 $\sin\alpha=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\angle KGG_1)=\cos\angle KGG_1=\dfrac{4}{5}$.

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

在 $\triangle ENG$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{40}{\sin\alpha}=\dfrac{14}{\sin\beta}$，解得 $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$.

因为 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\beta=\dfrac{24}{25}$.

于是 $\sin\angle NEG=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{24}{25}+(-\frac{3}{5})\times\frac{7}{25}=\frac{3}{5}.$$

记 EN 与水面的交点为 P_2，过 P_2 作 $P_2Q_2\perp EG$，Q_2 为垂足，则 $P_2Q_2\perp$ 平面 $EFGH$，

故 $P_2Q_2=12$，从而 $EP_2=\dfrac{P_2Q_2}{\sin\angle NEG}=20$.

答：玻璃棒 l 没入水中部分的长度为 20 cm.

（如果将“没入水中部分”理解为“水面以上部分”，则结果为 20 cm）

19. 本小题主要考查等差数列的定义、通项公式等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力. 满分 16 分.

证明：(1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，

从而，当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n-k}+a_{n+k}=a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d$

$=2a_1+2(n-1)d=2a_n$，$k=1,2,3$，

所以 $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$，

因此等差数列 $\{a_n\}$ 是“$P(3)$ 数列”.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 既是“$P(2)$ 数列”，又是“$P(3)$ 数列”，因此，

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}=4a_n$， ①

当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$. ②

由①知，$a_{n-3}+a_{n-2}=4a_{n-1}-(a_n+a_{n+1})$， ③

$a_{n+2}+a_{n+3}=4a_{n+1}-(a_{n-1}+a_n)$. ④

将③④代入②，得 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$，其中 $n\geqslant 4$，

所以 $a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是等差数列，设其公差为 d'.

在①中，取 $n=4$，则 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$，所以 $a_2=a_3-d'$，

在①中，取 $n=3$，则 $a_1+a_2+a_4+a_5=4a_3$，所以 $a_1=a_3-2d'$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

20. 本小题主要考查利用导数研究初等函数的单调性、极值及零点问题，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力. 满分 16 分.

解：(1) 由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，得 $f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+\dfrac{a}{3})^2+b-\dfrac{a^2}{3}$.

当 $x=-\dfrac{a}{3}$ 时，$f'(x)$ 有极小值 $b-\dfrac{a^2}{3}$.

因为 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点，

所以 $f(-\dfrac{a}{3})=-\dfrac{a^3}{27}+\dfrac{a^3}{9}-\dfrac{ab}{3}+1=0$，又 $a>0$，故 $b=\dfrac{2a^2}{9}+\dfrac{3}{a}$.

因为 $f(x)$ 有极值，故 $f'(x)=0$ 有实根，从而 $b-\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{1}{9a}(27-a^3)\leqslant 0$，即 $a\geqslant 3$.

当 $a=3$ 时，$f'(x)>0\ (x\neq -1)$，故 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，$f(x)$ 没有极值；

当 $a>3$ 时，$f'(x)=0$ 有两个相异的实根 $x_1=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}$，$x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}$.

列表如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故 $f(x)$ 的极值点是 x_1，x_2.
从而 $a>3$.
因此 $b=\dfrac{2a^2}{9}+\dfrac{3}{a}$，定义域为 $(3,+\infty)$.

(2) 由 (1) 知，$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{2a\sqrt{a}}{9}+\dfrac{3}{a\sqrt{a}}$.

设 $g(t)=\dfrac{2t}{9}+\dfrac{3}{t}$，则 $g'(t)=\dfrac{2}{9}-\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{2t^2-27}{9t^2}$.

当 $t\in(\dfrac{3\sqrt{6}}{2},+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，从而 $g(t)$ 在 $(\dfrac{3\sqrt{6}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

因为 $a>3$，所以 $a\sqrt{a}>3\sqrt{3}$，故 $g(a\sqrt{a})>g(3\sqrt{3})=\sqrt{3}$，即 $\dfrac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{3}$.

因此 $b^2>3a$.

(3) 由 (1) 知，$f(x)$ 的极值点是 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{3}a$，$x_1{}^2+x_2{}^2=\dfrac{4a^2-6b}{9}$.

从而 $f(x_1)+f(x_2)=x_1{}^3+ax_1{}^2+bx_1+1+x_2{}^3+ax_2{}^2+bx_2+1$

$=\dfrac{x_1}{3}(3x_1{}^2+2ax_1+b)+\dfrac{x_2}{3}(3x_2{}^2+2ax_2+b)+\dfrac{1}{3}a(x_1{}^2+x_2{}^2)+\dfrac{2}{3}b(x_1+x_2)+2$

$=\dfrac{4a^3-6ab}{27}-\dfrac{4ab}{9}+2=0$.

记 $f(x)$，$f'(x)$ 所有极值之和为 $h(a)$，

因为 $f'(x)$ 的极值为 $b-\dfrac{a^2}{3}=-\dfrac{1}{9}a^2+\dfrac{3}{a}$，所以 $h(a)=-\dfrac{1}{9}a^2+\dfrac{3}{a}$，$a>3$.

因为 $h'(a)=-\dfrac{2}{9}a-\dfrac{3}{a^2}<0$，于是 $h(a)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $h(6)=-\dfrac{7}{2}$，于是 $h(a)\geqslant h(6)$，故 $a\leqslant 6$.

因此 a 的取值范围为 $(3,6]$.

数学Ⅱ（附加题）

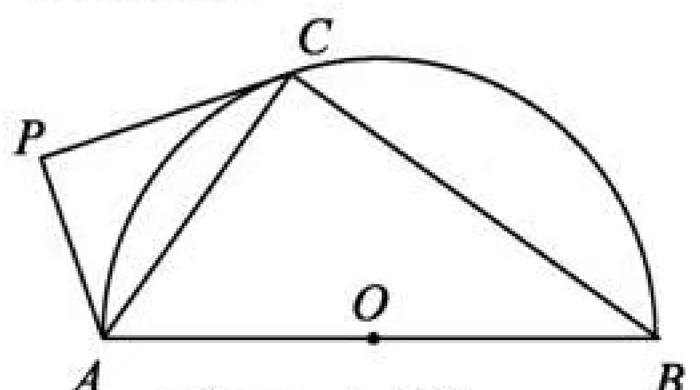
21.【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两小题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A. [选修 4–1：几何证明选讲]（本小题满分 10 分）

如图，AB 为半圆 O 的直径，直线 PC 切半圆 O 于点 C，$AP\perp PC$，P 为垂足.

求证：(1) $\angle PAC=\angle CAB$；

(2) $AC^2=AP\cdot AB$.



（第 21–A 题）

B. [选修 4–2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$；

(2) 若曲线 C_1：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到另一曲线 C_2，求 C_2 的方程.

C. [选修 4–4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-8+t,\\ y=\dfrac{t}{2}\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2s^2,\\ y=2\sqrt{2}s\end{cases}$（$s$ 为参数）. 设 P 为曲线 C 上的动点，求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

D. [选修 4–5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

已知 a，b，c，d 为实数，且 $a^2+b^2=4$，$c^2+d^2=16$，证明：$ac+bd\leqslant 8$.

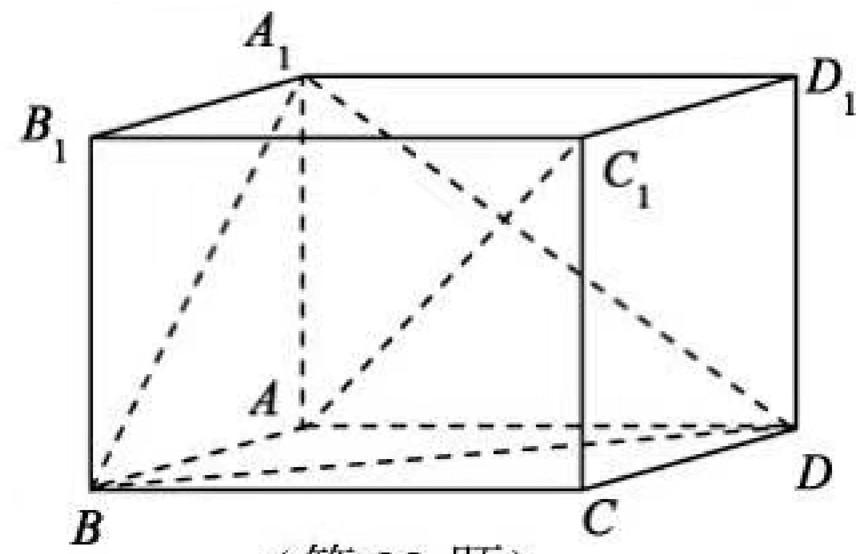
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AB=AD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，$\angle BAD=120°$.

(1) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值；

(2) 求二面角 $B-A_1D-A$ 的正弦值.



(第 22 题)

23. (本小题满分 10 分)

已知一个口袋中有 m 个白球，n 个黑球($m,n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$)，这些球除颜色外完全相同. 现将口袋中的球随机地逐个取出，并放入如图所示的编号为 1，2，3，…，$m+n$ 的抽屉内，其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉($k=1,2,3,\cdots,m+n$).

1	2	3	…	$m+n$

(1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p；

(2) 随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明：$E(X)<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$.

数学Ⅱ(附加题)参考答案

21.【选做题】

A. [选修 4-1：几何证明选讲]

本小题主要考查圆与相似三角形等基础知识，考查推理论证能力. 满分 10 分.

证明：(1) 因为 PC 切半圆 O 于点 C，

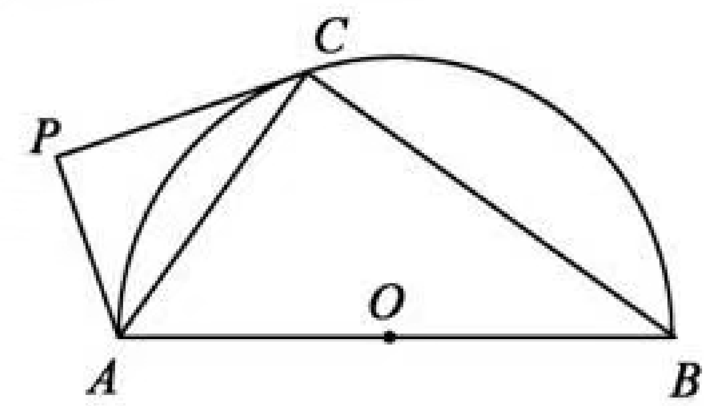
所以 $\angle PCA=\angle CBA$.

因为 AB 为半圆 O 的直径，

所以 $\angle ACB=90°$.

因为 $AP\perp PC$，所以 $\angle APC=90°$.

因此 $\angle PAC=\angle CAB$.



(第 21-A 题)

(2) 由 (1) 知，$\triangle APC\backsim\triangle ACB$，故 $\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$，

即 $AC^2=AP\cdot AB$.

B. [选修 4-2：矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的乘法、线性变换等基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解：(1) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$.

(2) 设 $Q(x_0,y_0)$ 为曲线 C_1 上的任意一点，

它在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下变为 $P(x,y)$，

则 $\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}2y_0=x,\\x_0=y,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=y,\\y_0=\dfrac{x}{2}.\end{cases}$

因为点 $Q(x_0,y_0)$ 在曲线 C_1 上，则 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{8}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{2}=1$，

从而 $\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x^2}{8}=1$，即 $x^2+y^2=8$.

因此曲线 C_1 在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到曲线 C_2：$x^2+y^2=8$.

C. [选修4-4：坐标系与参数方程]

本小题主要考查曲线的参数方程及互化等基础知识，考查运算求解能力. 满分10分.

解：直线 l 的普通方程为 $x-2y+8=0$.

因为点 P 在曲线 C 上，设 $P(2s^2,\ 2\sqrt{2}s)$，

从而点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2s^2-4\sqrt{2}s+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2(s-\sqrt{2})^2+4}{\sqrt{5}}$.

当 $s=\sqrt{2}$ 时，$d_{\min}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

因此当点 P 的坐标为 $(4,\ 4)$ 时，曲线 C 上点 P 到直线 l 的距离取到最小值 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

D. [选修4-5：不等式选讲]

本小题主要考查不等式的证明，考查推理论证能力. 满分10分.

证明：由柯西不等式可得：$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

因为 $a^2+b^2=4$，$c^2+d^2=16$，

所以 $(ac+bd)^2\leqslant 64$，

因此 $ac+bd\leqslant 8$.

22.**【必做题】本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和二面角等基础知识，考查运用空间向量解决问题的能力. 满分10分.**

解：在平面 $ABCD$ 内，过点 A 作 $AE\perp AD$，交 BC 于点 E.

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1\perp AE$，$AA_1\perp AD$.

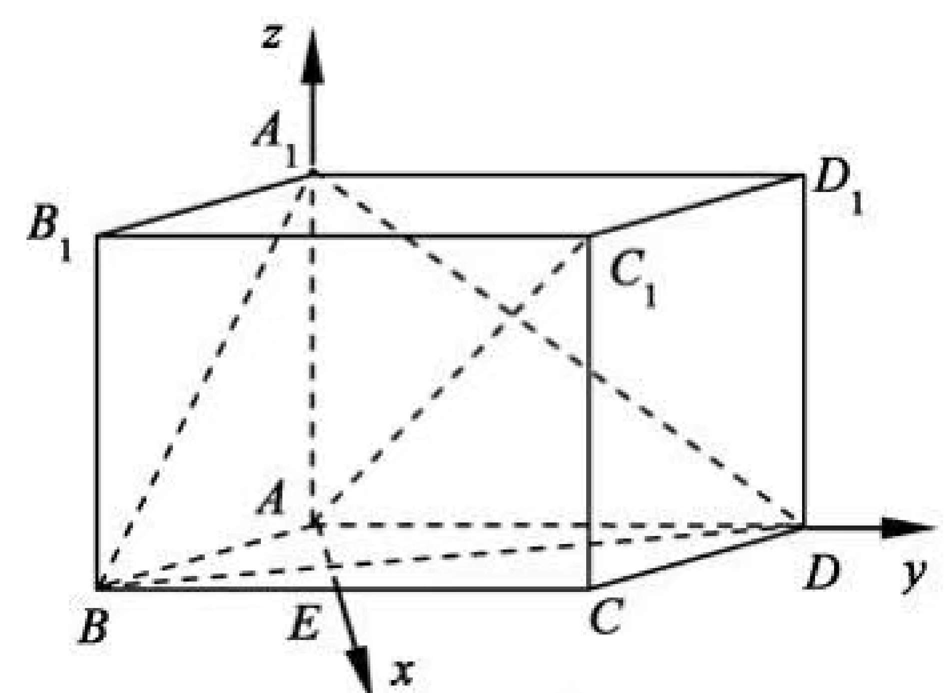
如图，以 $\{\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA_1}\}$ 为正交基底，

建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

因为 $AB=AD=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，$\angle BAD=120°$，

则 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$D(0,2,0)$，

$E(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.



(第22题)

(1) $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC_1}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，

则 $\cos<\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AC_1}>=\dfrac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{AC_1}|}$

$=\dfrac{(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3},1,\sqrt{3})}{7}=-\dfrac{1}{7}$，

因此异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$.

(2) 平面 A_1DA 的一个法向量为 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 BA_1D 的一个法向量，

又 $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},3,0)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}z=0,\\ -\sqrt{3}x+3y=0.\end{cases}$

不妨取 $x=3$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=2$，

所以 $\boldsymbol{m}=(3,\sqrt{3},2)$ 为平面 BA_1D 的一个法向量，

从而 $\cos<\overrightarrow{AE},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{(\sqrt{3},0,0)\cdot(3,\sqrt{3},2)}{\sqrt{3}\times 4}=\dfrac{3}{4}$.

设二面角 $B-A_1D-A$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{3}{4}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

因此二面角 $B-A_1D-A$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.